LFA 09

5-6 Novembre 2009

Construction d'une densité de masse consonante associée à une densité de probabilité multimodale

Pierre-Emmanuel DORÉ Arnaud Martin Ali Khenchaf

ENSIETA - E3I2 EA3876

2 rue François Verny, 29806 BREST Cedex 09

{Pierre-Emmanuel.Dore,Arnaud.Martin,Ali.Khenchaf}@ensieta.fr

Plan

1 Introduction
- Pourquoi utiliser des fonctions de croyance ?
- Limites des fonctions de croyance discrètes

2 Fonctions de croyance continues

3 Mesure crédale

4 Croyance issue d'une probabilité

5 Conclusion et perspectives

Pourquoi utiliser des fonctions de croyance ?

- Modéliser les imperfections d'une source d'informations :
  - incertitude,
  - imprécision,
  - ignorance,
  - incomplétude,
  - ambigüité,
  - fiabilité.
- Fusionner de nombreuses sources d'informations différentes.
- Associer une fonction de croyance à une probabilité.

Limites des fonctions de croyance discrètes

- Explosion combinatoire des éléments focaux.
- Mal adaptée pour l'estimation de paramètres car la décision est prise sur une classe et non sur une donnée continue.
- On peut vouloir modéliser l'information de manière continue.

Plan

1 Introduction

2 Fonctions de croyance continues
- Densité de masse élémentaire
- Domaines d'intégration
- Quelques outils
- Croyance issue d'une probabilité
- Limites

3 Mesure crédale

4 Croyance issue d'une probabilité

5 Conclusion et perspectives

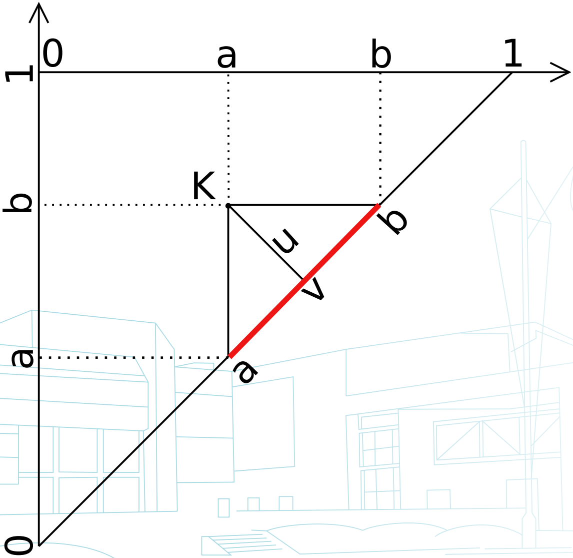
Densité de masse élémentaire

On note $m^{\mathcal{I}}$, densité de masse élémentaire sur $\mathcal{I}$, la fonction :

$$m^{\mathcal{I}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}^{+} \\ [x,y] & \longmapsto & m^{\mathcal{I}}([x,y]) \end{array} \tag{1}$$

- Les éléments focaux de $m^{\mathcal{I}}$ sont les fermés de $\mathcal{I}$.
- $x > y \Rightarrow m^{\mathcal{I}}([x,y]) = 0$
- On pose $INT = \iint_{x,y} m^{\mathcal{I}}([x,y])\, dydx \leqslant 1$ et $m^{\mathcal{I}}(\emptyset) = 1 - INT$

Cadre de travail



Fonction de crédibilité

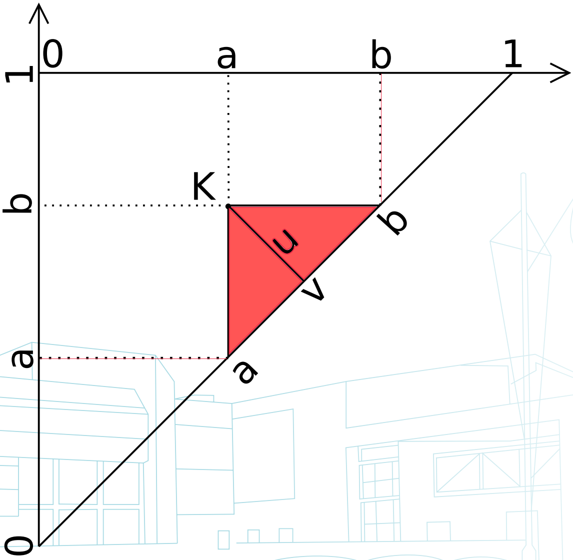


Fig. 1: Ensemble des $[x, y] \subseteq [a, b]$

Fonction de plausibilité

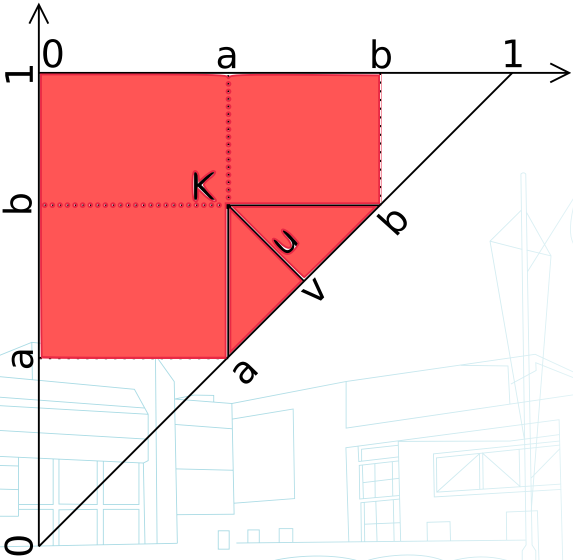


Fig. 2: Ensemble des $[x, y] \cap [a, b] \neq \emptyset$

Fonction de communalité

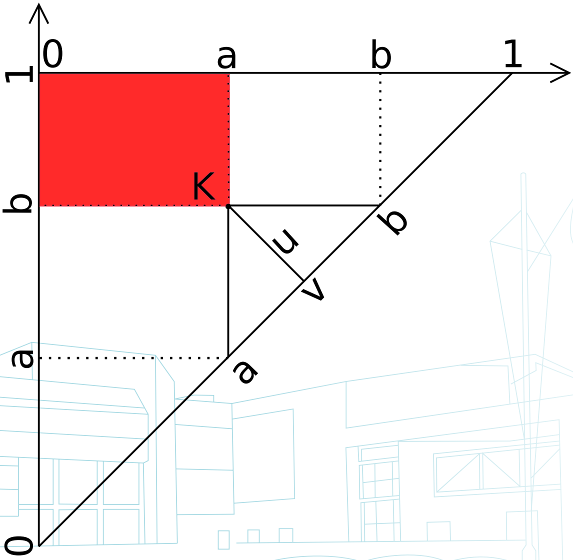


Fig. 3: Ensemble des $[a, b] \subseteq [x, y]$

- La combinaison conjonctive :

$$m_1^{\mathcal{I}}(X) \cdot m_2^{\mathcal{I}}(Y) \longrightarrow m_{1 \textcircled{\cap} 2}^{\mathcal{I}}(X \cap Y) \tag{2}$$

$$q_{1 \textcircled{\cap} 2}^{\mathcal{I}}(X) = q_1^{\mathcal{I}}(X) \cdot q_2^{\mathcal{I}}(X) \tag{3}$$

- Le principe de moindre engagement :

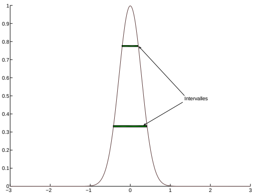
$$\left(\forall A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n, q_1^{\mathcal{I}}(A) \leqslant q_2^{\mathcal{I}}(A)\right) \Longrightarrow \left(m_1^{\mathcal{I}} \sqsubseteq_q m_2^{\mathcal{I}}\right) \tag{4}$$

- La probabilité pignistique.

Croyance issue d'une probabilité

$$BetP([a,b]) = \int_{x=-\infty}^{b} \int_{y=x}^{\infty} \frac{|\,[x,y] \cap [a,b]\,|}{|\,[x,y]\,|} m^{\mathcal{I}}([x,y])\, dydx \quad (5)$$

- On note $IsoBet\,(BetP)$ l'ensemble des fonctions de masse ayant pour probabilité pignistique $BetP$.
- On montre que la LC$\sqsubseteq_q$ de $IsoBet\,(BetP)$ est consonante.



. 4: Une densité de probabilité en forme de *cloche*.

Limites de l'approche

- Le résultat n'est valable que si la densité de probabilité est symétrique et unimodale.
- On ne peut mettre de masse que sur des intervalles.

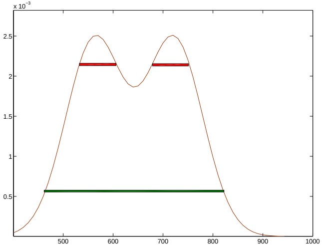


Fig. 5: Une densité de probabilité multimodale.

Plan

1 Introduction

2 Fonctions de croyance continues

3 Mesure crédale
- Fonction indice et mesure crédale
- Fonctions de croyance
- Combinaison conjonctive
- Changement de variable

4 Croyance issue d'une probabilité

5 Conclusion et perspectives

Fonction indice et mesure crédale

Définition (Fonction indice)

$$\begin{array}{rccl} f^I : & I \in \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^I\right) & \longrightarrow & \mathcal{F}\left(\mu^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}\right) \\ & y & \longmapsto & f^I(y) \end{array} \tag{6}$$

Définition (Mesure crédale)

$\mu^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}$ est une mesure positive telle que $\int_I d\mu^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}(y) \leqslant 1.$

Définition (Espace crédal)

$$\left(I, \mathcal{B}(I), \mu^{\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)}\right)$$

Fonctions de croyance

$$\begin{aligned} F_{\subseteq A} &= \{y \in I | f^I(y) \subseteq A\} \\ F_{\cap A} &= \{y \in I | \left(f^I(y) \cap A\right) \neq \emptyset\} \\ F_{\supseteq A} &= \{y \in I | A \subseteq f^I(y)\} \end{aligned} \tag{7}$$

$$bel^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F_{\subseteq A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \tag{8}$$

$$pl^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F_{\cap A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \tag{9}$$

$$q^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = \int_{F_{\supseteq A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \tag{10}$$

Combinaison conjonctive

Théorème

Soit $\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ et $\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ deux mesures crédales, lorsqu'on les combine en utilisant la règle de combinaison conjonctive, on obtient une mesure crédale $\mu_{1 \textcircled{\cap} 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ qui vérifie l'égalité :

$$q_{1 \textcircled{\cap} 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = q_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \cdot q_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \tag{11}$$

Démonstration.

Soit l'application $f^{I_1 \circledcirc 2}$ telle que :

$$f^{I_1 \circledcirc 2} : \quad \begin{array}{rcl} I_{1 \circledcirc 2} = I_1 \times I_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}\left(m_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right) \\ y = (y_1, y_2) & \longmapsto & f^{I_1}(y_1) \cap f^{I_2}(y_2) \end{array}$$

- $F_{\subseteq A}^{1 \circledcirc 2} = \left(F_{\subseteq A}^{1} \times I_2\right) \cup \left(I_1 \times F_{\subseteq A}^{2}\right)$
- $F_{\cap A}^{1 \circledcirc 2} = F_{\cap A}^{1} \times F_{\cap A}^{2}$
- $F_{\supseteq A}^{1 \circledcirc 2} = F_{\supseteq A}^{1} \times F_{\supseteq A}^{2}$

On lui associe mesure crédale $\mu_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ telle que

$$\mu_{1 \circledcirc 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)} = \mu_{1}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)} \otimes \mu_{2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$$

$\square$

Changement de variable

Théorème

Soit f^{I_1} et f^{I_2}, deux fonctions indices associées aux densités de masses $\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ et $\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$. Supposons φ, une fonction de changement de variable telle que $\varphi(y_1) = y_2$ implique $f^{I_1}(y_1) = f^{I_2}(y_2)$. Ces densités de masse sont identiques si

$$d\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_1) = \left|det\left(\varphi'(y_1)\right)\right| d\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(\varphi(y_1)) \qquad (12)$$

Plan

1 Introduction

2 Fonctions de croyance continues

3 Mesure crédale

4 Croyance issue d'une probabilité
- Étude d'une fonction décrivant les α-coupes
- Probabilité des α-coupes
- Applications

5 Conclusion et perspectives

Étude d'une fonction décrivant les α-coupes

Soit les α-coupes de $Betf$, la densité de probabilité de $BetP$:

$$f_{cs}^I(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n | Betf\,(x) \geqslant \alpha\} \quad (13)$$

Est-ce que f_{cs}^I est une fonction indice ?

$$\begin{array}{llll} f_{cs}^I : & I = [0, \alpha_{\max}] & \longrightarrow & \left\{f_{cs}^I(\alpha)\,|\alpha \in I\right\} \\ & \alpha & \longmapsto & f_{cs}^I(\alpha) \end{array} \quad (14)$$

- $F_{\subseteq A}^{cs}$ est un borélien :

$$\begin{array}{ll} F_{\subseteq A}^{cs} \neq \emptyset & \Rightarrow \exists \alpha_{\inf} = \inf\left\{\alpha \in I | f_{cs}^I(\alpha) \cap A \neq \emptyset\right\} \\ & \Rightarrow F_{\subseteq A}^{cs} = [\alpha_{\inf}, \alpha_{\max}] \end{array} \quad (15)$$

- ...

Probabilité des α-coupes

Transformation pignistique :

$$BetP(A) = \int_{F_{\cap A}} \frac{\lambda\left(A \cap f^I(y)\right)}{\lambda\left(f^I(y)\right)} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \tag{16}$$

Notons ν la mesure telle que :

$$\lambda\left(f^I_{cs}(\alpha)\right) = \int_{\alpha_{\max}}^{\alpha} d\nu(y) \tag{17}$$

On a alors :

$$BetP\left(f^I_{cs}(\alpha)\right) = \int_{\alpha_{\max}}^{\alpha} y d\nu(y) \tag{18}$$

De même :

$$BetP\left(f^I_{cs}(\alpha)\right) = \int_{\alpha_{max}}^{0} \frac{\lambda\left(f^I_{cs}(\alpha) \cap f^I_{cs}(y)\right)}{\lambda\left(f^I_{cs}(y)\right)} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \tag{19}$$

Croyance issue d'une probabilité

Théorème

Soit une densité de probabilité Betf continue. On peut lui associer une mesure crédale $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ consonante dont les éléments focaux sont les α-coupes de Betf. On a alors :

$$d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(\alpha) = \lambda\left(f_{cs}^{I}(\alpha)\right) d\lambda(\alpha) \qquad (20)$$

Cas de $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple

Comme $\alpha = Betf(x)$, on a :

$$d\lambda(\alpha) = Betf'(x)\, d\lambda(x) = xBetf(x)\, d\lambda(x) \tag{21}$$

D'après le théorème précédent :

$$d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(\alpha) = \lambda\left(f_{cs}^{I}(\alpha)\right) d\lambda(\alpha) = 2Betf^{-1}(\alpha)\, d\lambda(\alpha) \tag{22}$$

En faisant un changement de variable, on retrouve le résultat :

$$d\tilde{\mu}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(x) = 2x^2 Betf(x)\, d\lambda(x) \tag{23}$$

Cas d'un mélange de gaussiennes

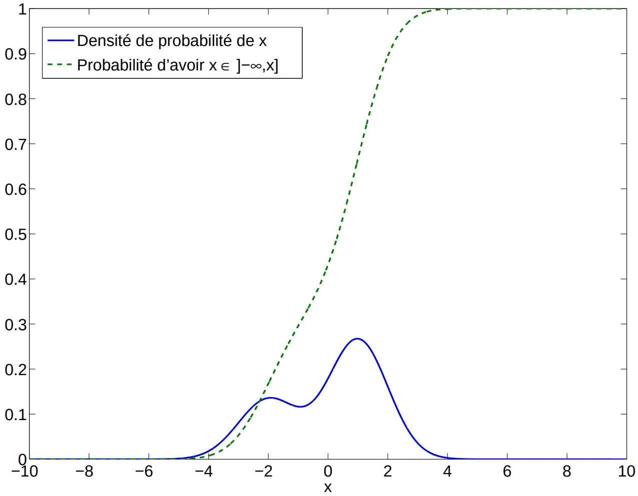


Fig. 6: Un mélange de gaussiennes.

Cas d'un mélange de gaussienne

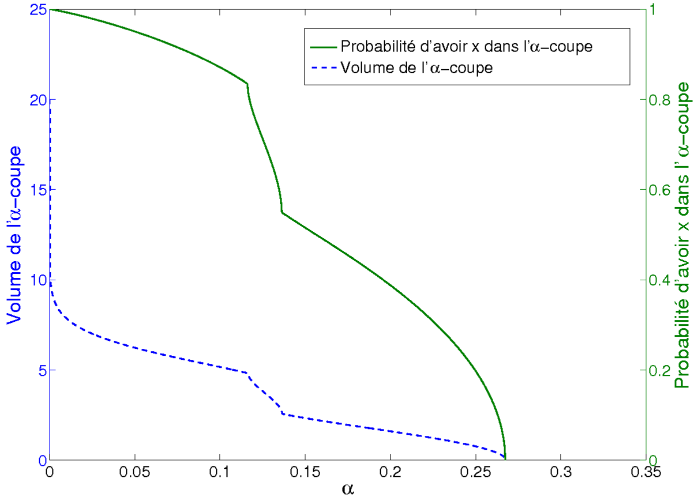


Fig. 7: Étude des α-coupes.

Cas d'un mélange de gaussienne

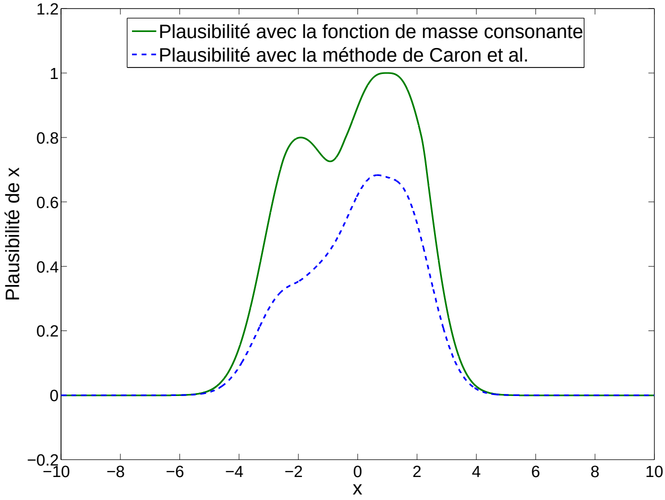


Fig. 8: Comparaison des plausibilités obtenues.

Plan

1 Introduction

2 Fonctions de croyance continues

3 Mesure crédale

4 Croyance issue d'une probabilité

5 Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

- Proposition de formalisme pour généraliser l'approche.
- Génération de fonctions de croyance consonantes associées à une densité de probabilité multimodale.
- Voir si l'on peut obtenir une propriété identique à celle de moindre engagement.
- Faire un lien avec les travaux de Choquet et Shafer.
- Application à des problèmes de classification.